



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală 07 februarie 2026

Clasa a VI-a

Problema 1 (21 de puncte)

- a) Aflați câți divizori naturali are numărul 4242 .
b) Arătați că nu există numere naturale de trei cifre, divizibile cu 42 , care să aibă un număr impar de divizori naturali.

(Supliment GM 11/2025)

Problema 2 (21 de puncte)

Fie numerele naturale a , b și c , $c \neq 0$, astfel încât $\frac{a}{18} = \frac{b}{15}$ și $\frac{b}{5} = \frac{c^2 + 7}{c}$.

- a) Arătați că a este divizibil cu 6.
b) Determinați tripletele (a, b, c) care verifică simultan condițiile din enunț.

Problema 3 (21 de puncte)

Fie unghiurile adiacente suplementare $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOC$. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$, semidreptele ON și OP sunt interioare unghiului $\sphericalangle BOC$ astfel încât $\sphericalangle CON = \sphericalangle NOP = \sphericalangle POB$, iar $\sphericalangle MOP = 110^\circ$.

- a) Aflați măsura unghiului $\sphericalangle MON$.
b) Arătați că semidreapta OM și bisectoarea unghiului $\sphericalangle NOP$ sunt perpendiculare.

Problema 4 (21 de puncte)

- a) Demonstrați că există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (k, n) cu proprietatea

$$k + (k+1) + (k+2) \dots + (k+n) = (n+1)^2.$$

- b) Demonstrați că nu există nicio pereche de numere naturale nenule (p, m) cu proprietatea

$$p + (p+1) + (p+2) \dots + (p+m) = m^2.$$

Cătălin Cristea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Din oficiu se acordă 16 puncte
Timp de lucru 3 ore



Barem de notare și evaluare

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, Dolj, 07 februarie 2026

Clasa a VI-a

Problema 1

a) $4242 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 101$	6p
Numărul divizorilor naturali este egal cu $(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16$	6p
b) Deoarece numărul căutat are un număr impar de divizori naturali, înseamnă că este pătrat perfect, deci este de forma $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$	3p
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 1764 > 999$	3p
Rezultă că nu există numere naturale de trei cifre, divizibile cu 42, care să aibă un număr impar de divizori naturali	3p
TOTAL	21p

Problema 2

a) $15a = 18b$, de unde $5a = 6b$	3p
$(5, 6) = 1$	3p
Deducem $a : 6$	3p
b) Conform celor de la punctul a) avem $b : 5$, adică $\frac{b}{5}$ este număr natural	3p
Din a doua relație deducem că $c (c^2 + 7)$. Cum $c c^2$, avem $c 7$, deci $c \in \{1, 7\}$	3p
Caz I. $c = 1$, de unde $b = 40$ și $a = 48$, $(a, b, c) = (48, 40, 1)$.	3p
Caz II. $c = 7$, de unde $b = 40$ și $a = 48$, $(a, b, c) = (48, 40, 7)$.	3p
TOTAL	21p

Problema 3

a) Fie $\angle AOM = \angle MOC = x$, iar $\angle CON = \angle NOP = \angle POB = y$	3p
Așadar $2x + 3y = 180^\circ$, iar $\angle MOP = 110^\circ$, adică $x + 2y = 110^\circ$	3p
Prin urmare $x = 30^\circ$ și $y = 40^\circ$	6p
Obținem $\angle MON = 70^\circ$	3p
b) Fie OX bisectoarea unghiului $\angle NOP$, $\angle NOX = 20^\circ$	3p
Deci $\angle MOX = 30^\circ + 40^\circ + 20^\circ = 90^\circ$, adică $OM \perp OX$	3p
TOTAL	21p



Problema 4

<p>a) Relația din enunț se scrie echivalent: $(n+1)k + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)^2$</p> <p>Rezultă $k = \frac{n}{2} + 1$</p> <p>Perechile de forma $(s+1, 2s)$, unde s este număr natural nenul, verifică proprietatea din enunț.</p>	<p>3p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p>b) $(m+1)p + \frac{m(m+1)}{2} = m^2 \Leftrightarrow (m+1)(2p+m) = 2m^2. (*)$</p> <p>$m / (m+1)(2p+m)$ și cum $(m, m+1) = 1$, obținem că $m / (2p+m)$, deci $m / 2p$</p> <p>Dacă $m = 2p$, din relația $(*)$ obținem $2p = 2p+1$, fals</p> <p>Dacă $m < 2p$, cum $m / 2p$ obținem $m \leq p$, iar din relația din enunț avem:</p> <p>$m^2 = p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+m) \geq m + (m+1) + \dots + 2m = \frac{3m(m+1)}{2}$, deci</p> <p>$2m^2 \geq 3m^2 + 3m$, fals.</p> <p>În concluzie, nu există nicio pereche de numere naturale nenule (p, m) cu proprietatea</p> <p>$p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+m) = m^2$</p>	<p>3p</p> <p>3p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p>TOTAL</p>	<p>21p</p>